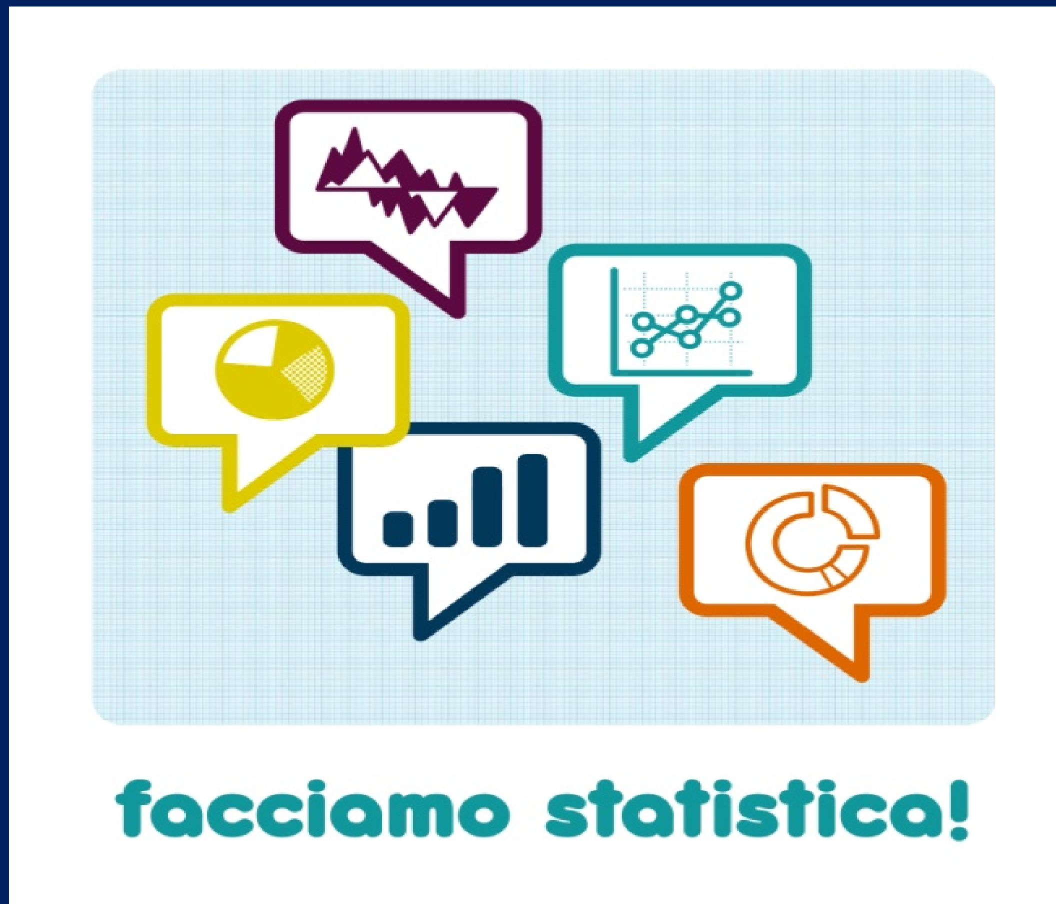
PROBABILITA’



SCUOLA SUPERIORE DI STATISTICA E DI ANALISI SOCIALI ED ECONOMICHE
Istat
Fondazione Giovanni Agnelli

Introduzione

La maggior parte dei fenomeni, ai quali assistiamo quotidianamente, può manifestarsi in vari modi, ma è quasi sempre impossibile stabilire a priori quale di essi si presenterà ogni volta.

La **PROBABILITA'** è un numero che si associa ad un *evento E* ed esprime il grado di <u>aspettativa</u> circa il suo verificarsi.

Definizioni

Secondo la definizione **classica** di probabilità si definisce probabilità di un evento il rapporto tra il numero dei casi ***favorevoli*** all'evento e il numero dei casi ***possibili***, purché questi ultimi siano tutti ***equiprobabili***.

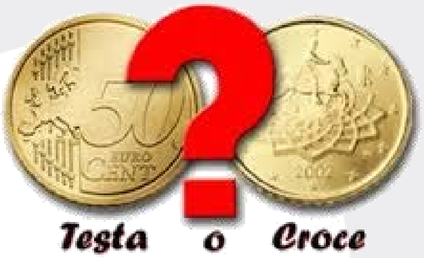
Nel tempo si sono date, tuttavia, anche altre definizioni più complesse e articolate del concetto di probabilità (definizione *frequentista*, definizione *soggettiva* e definizione *assiomatica*).

Definizione “classica”

$$probabilità = \frac{numero\ dei\ casi\ favorevoli}{numero\ dei\ casi\ possibili}$$

Facciamo un esempio: se lancio una moneta qual è la probabilità che esca “Croce”?

Casi possibili (2): “Testa” o “Croce”

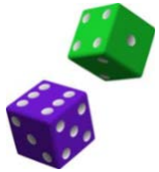


Caso favorevole (1): “Croce”

Probabilità: 1 su 2 = **0,5**

Esperimento Casuale Semplice

Se si getta in aria una moneta e si registra il risultato (testa o croce) del lancio, si dice che si è effettuato un **esperimento casuale semplice** o un esperimento casuale elementare. In effetti *prima* di effettuare il lancio, **entrambi i risultati sono possibili**, per cui a priori il risultato dell'esperimento è ***incerto***.

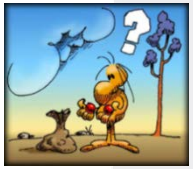


Evento casuale

- evento impossibile, come quello di estrarre il numero 100 dalla tombola. **PROBABILITA'** sempre uguale a 0 (**P=0**)

- evento certo, come l'uscita di un numero compreso tra 1 e 6 nel lancio di un dado. **PROBABILITA'** sempre uguale a 1 (**P=1**)

- evento possibile, come quello di estrarre una pallina bianca da una scatola contenente sia palline bianche che rosse. **PROBABILITA'** compresa tra 0 e 1 (**0<P<1**)



Come si esprime?

Riprendendo l'esempio del lancio della monetina, la probabilità che esca "Croce" si può esprimere come segue:

- Con una frazione: **1/2**
- Con un numero decimale che va da 0 a 1: **0,5**
- Con una percentuale, ad esempio: **50%**

Legge dei Grandi Numeri

Legge dei Grandi Numeri

<ins>*La legge più importante del calcolo delle probabilità*</ins> è la legge empirica del caso o **legge dei grandi numeri**, che stabilisce una <ins>relazione</ins> fra la **probabilità** teorica **di un evento e** la **frequenza statistica** con cui quell'evento si verifica.

EVENTI: E_1= «**esce testa**» e E_2= «**esce croce**»

PROBABILITA': $P(E_1)$ = **1/2** e $P(E_2)$ = **1/2**

Naturalmente non possiamo assolutamente affermare che se eseguiamo due lanci e al primo otteniamo «testa», al secondo avremo sicuramente «croce»! Sarebbe solo un caso se ciò si verificasse.

Legge dei Grandi Numeri

Supponiamo di effettuare 10 lanci della moneta e di ottenere 6 volte «testa» e 4 volte «croce», si può affermare che:

- Il *numero di volte* che un evento *E* si è verificato, durante un numero *n* di prove effettuate, si chiama ***frequenza assoluta*** dell'evento.
- Il *rapporto* fra la frequenza assoluta dell'evento *E* e il numero *n* di prove effettuate si chiama ***frequenza relativa*** ***F(E)*** dell'evento E:

$$F(E) = \frac{frequenza \quad assoluta}{n}$$

Legge dei Grandi Numeri

Riprendendo l'esempio della monetina e continuando ad eseguire un numero elevato di lanci si vede che…

n. prove	*frequenza assoluta*	*frequenza relativa*
10	**6**	6/10 = ***0,6***
100	**56**	56/100 = ***0,56***
1000	**532**	532/1000 = ***0,532***

All'aumentare del numero di prove, la frequenza relativa dell'evento si avvicina sempre più alla probabilità teorica.

Eventi Incompatibili, Compatibili e Complementari

Eventi Incompatibili

Consideriamo il lancio di un dado ed esaminiamo due eventi possibili:

- **E_1**: *«esce il numero 4»*
- **E_2**: *«esce il numero 1»*

Gli eventi parziali E_1 ed E_2 si dicono incompatibili in quanto, facendo un solo lancio, non può uscire il numero 1 e contemporaneamente il numero 4; ma è anche possibile che nessuno dei due si verifichi in quanto possono uscire il 3, il 2, il 5 o il 6.

Due eventi aleatori E_1 *e* E_2 sono **incompatibili** se il verificarsi dell'uno ***esclude*** il verificarsi dell'altro, ovvero se NON possono verificarsi contemporaneamente.

Eventi Incompatibili

Riconsideriamo l'esempio:

- **E_1**: *«esce il numero 4»* $P(E_1) = 1/6$
- **E_2**: *«esce il numero 1»* $P(E_2) = 1/6$

La probabilità dell'evento "esce il numero 4 o il numero 1" è uguale a:

$$P(E_1 \text{ o } E_2) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = \mathbf{1/3}$$

Dati due eventi aleatori **incompatibili**, *E_1 ed E_2*, la probabilità che si verifichi o l'uno o l'altro è data dalla ***somma delle probabilità di ciascuno dei due eventi***:

$$\mathbf{P(E_1 \text{ o } E_2) = P(E_1) + P(E_2)}$$

Eventi Compatibili

Consideriamo l'estrazione di una carta da un mazzo di carte napoletane ed esaminiamo due casi possibili:

- **E_1**: *«esce una carta di spade»*
- **E_2**: *«esce un asso »*

I due eventi E_1 ed E_2 si dicono compatibili perché possono verificarsi contemporaneamente, in quanto se esce l'asso di spade si verifica sia l'evento E_1 (esce una carta di spade), sia l'evento E_2 (esce un asso).

Due eventi aleatori E_1 *e* E_2 sono **compatibili** se il verificarsi dell'uno ***NON esclude*** il verificarsi dell'altro, ovvero se possono verificarsi contemporaneamente.

Eventi Compatibili

Riconsideriamo l'esempio:

- **E_1**: *«esce una carta di spade»* $P(E_1) = 10/40 = 1/4$
- **E_2**: *«esce un asso»* $P(E_2) = 4/40 = 1/10$

La probabilità dell'evento "esce una carta di spade 4 o un asso" è uguale a:

$$P(E_1 \text{ o } E_2) = 1/4 + 1/10 – 1/40 = \mathbf{13/40}$$

Dati due eventi aleatori **compatibili**, *E_1 ed E_2*, la probabilità che si verifichi uno dei due è data dalla *somma delle probabilità di ciascuno dei due eventi* **meno** *la probabilità che si verifichino contemporaneamente* ("esce l'asso di spade"):

$$\mathbf{P(E_1 \text{ o } E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \text{ e } E_2)}$$

Eventi Complementari

Consideriamo l'estrazione di una lettera da un sacchetto contenente le seguenti lettere: **S T A T I S T I C A** ed esaminiamo due casi possibili:

- **E_1**: *«estrarre una consonante»*
- **E_2**: *«estrarre una vocale»*

I due eventi E_1 ed E_2 sono incompatibili, ma complementari: il verificarsi di E_1 esclude il verificarsi di E_2, però uno dei due si verificherà certamente; infatti l'evento "estrarre una consonante o una vocale è un evento certo .

Due eventi aleatori E_1 *e* E_2 sono **complementari** se il verificarsi dell'uno ***esclude*** il verificarsi dell'altro, ma *uno dei due* si verificherà certamente.

Eventi Complementari

Riconsideriamo l'esempio:

- **E_1**: *«estrarre una consonante»* $P(E_1) = 6/10$
- **E_2**: *«estrarre una vocale»* $P(E_2) = 4/10$

La probabilità dell'evento "estrarre una consonante o una vocale" è uguale a:

$$P(E_1 \text{ o } E_2) = 6/10 + 4/10 = \mathbf{10/10 = 1}$$

Due eventi aleatori **complementari** sono sempre ***incompatibili***, ma due eventi incompatibili **NON** sono sempre complementari. La somma delle *probabilità di due eventi complementari è sempre uguale a 1* (**evento certo**):

$$\mathbf{P(E_1 \text{ o } E_2) = P(E_1) + P(E_2) = 1}$$

PROBABILITA'

facciamo statistica!